**第11讲 直角三角形的判定与性质**

**知识梳理**

**1.直角三角形全等的判定**

**定理：**如果两个直角三角形的\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_和一条\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_对应相等，那么这两个直角三角形全等(简记为H.L).

**2.直角三角形的性质**

**定理1：**直角三角形的两个锐角\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**定理2：**直角三角形斜边上的中线等于斜边的\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.(斜中线定理)

**3.直角三角形的相关推论**

**推论1：**在直角三角形中，如果一个锐角等于\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，那么它所对的直角边等于斜边的\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**推论2：**在直角三角形中，如果一条直角边等于斜边的\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，那么这条直角边所对的角等于\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**典型解析**

**例1：**已知：如图，∠*ABC*=∠*ADC*=90°，*E*是*AC*上一点，*AB*=*AD*.求证：*EB*=*ED*.



**例2：**如图所示，*AD*，*BE*分别是△*ABC*的边*BC*，*AC*上的高，*F*是*DE*的中点，*G*是*AB*的中点，则*FG*⊥*DE*.

****

分析：*G*是*AB*的中点，*AB*是两个直角三角形的斜边，则联想到斜中线.

解：连接*GE*，*GD*

因为*BE*⊥*AC*，*AD*⊥*BC*，*G*是*AB*的中点

所以*GE*=*AB*，*GD*=*AB*（直角三角形斜中线定理）

所以*GE*=*GD*

又因为*F*是*DE*的中点

所以*FG*⊥*DE*（等腰三角形三线合一）

**例3：**已知：如图，*AE*，*BD*相交于点*C*，*M*、*F*、*G*分别是*AD*、*BC*、*CE*的中点，*AB*=*AC*，*DC*=*DE*，求证：*MF*=*MG*.

****

**例4：**在Rt△*ABC*中，∠*B*=90°，∠*BAC*=78°，过点*C*作*CF*∥*AB*，联结*AF*与*BC*相交于点*G*.若*GF*=2*AC*，求∠*BAG*的度数.



**例5：**已知：如图，在等边△*ABC*中，点*D*，*E*分别在*AB*，*AC*上，且*BD*=*AE*，*CD*交*BE*于点*O*，*DF*⊥*BE*，点*F*为垂足，求证：*OD*=2*OF*.



**例6：**如图，*P*为△*ABC*边*BC*上的一点，且*PC*=2*PB*，∠*ABC*=45°，∠*APC*=60°，求∠*ACB*的度数.



**例7：**如图，在△*ABC*中，*AB*=*AC*，∠*BAC*=120°，*D*是*BC*的中点，*DE*⊥*AB*于点*E*，求*BE*∶*EA*的值.



**例8：**如图，点*A*是等腰直角△*ABC*的直角顶点，*AD*∥*BC*，*BD*=*BC*，求∠*CDB*的度数.



**例9：**已知：如图所示，Rt△*ABC*中，∠*ACB*=90°，*M*是*AB*的中点，*CH*⊥*AB*于*H*，*CD*平分∠*ACB*.

(1)证明∠*DCH*=∠*MCD*.

(2)过点*M*作*AB*的垂线交*CD*延长线于*E*，证明*CM*=*EM*.

(3)猜想△*AEB*是什么三角形？并说明理由.

分析：Rt△*ABC*中，*CH*⊥*AB*，是我们熟悉的“母子型”，再利用直角三角形斜中线的性质即可解决问题.

解：(1)因为∠*ACB*=90°，*AM*=*MB*

所以*CM*=*MA*

所以∠*CAM*=∠*ACM*又因为∠*ACB*=90°，*CH*⊥*AB*

所以∠*CAM*=∠*BCH*

所以∠*ACM*=∠*BCH*

又因为*CD*平分∠*ACB*

所以∠*ACD*=∠*BCD*

因为∠*MCD*=∠*ACD*-∠*ACM*，∠*HCD*=∠*BCD*-∠*BCH*

所以∠*DCH*=∠*MCD*

(2)因为*CH*⊥*AB*，*EM*⊥*AB*

所以∠*CHD*=90°，∠*EMD*=90°

所以*CH*//*ME*

所以∠*MED*=∠*DCH*

又因为∠*DCH*=∠*MCD*（已证）

所以∠*MED*=∠*MCD*

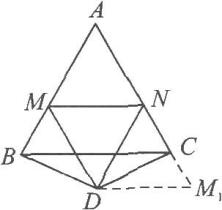
所以*CM*=*EM*

(3)等腰直角三角形.因为*EM*=*CM*=*AB*，所以△*AEB*是直角三角形.

因为*ME*既是边*AB*的高线又是中线，所以*AE*=*BE*，所以△*AEB*是等腰直角三角形.

**例10：**如图，△*ABC*是正三角形，△*BDC*是顶角∠*BDC*=120°的等腰三角形，以*D*为顶点作一个60°角，角的两边分别交*AB*、*AC*边于*M*、*N*两点，连接*MN*.试探究线段*CN*、*BM*、*MN*之间的关系，并加以证明.



[解析]通过观察可以猜想这三条线段之间的关系为*MN*=*CN*+*BM*.这类问题的证明方法通常是将*MN*截成两段，或将*NC*或*MB*延长，补成长为*CN*+*BM*的线段，运用全等三角形来证明.

[答案]*BM*+*CN*=*MN*.

证明：如图，延长*NC*至*M*1，使*CM*1=*BM*，连接*DM*1.

∵△*ABC*是正三角形，∴∠*ABC*=∠*ACB*=60°.

∵∠*BDC*=120°，且*BD*=*CD*，∴∠*DBC*=∠*DCB*=30°.

∴∠*ABD*=∠*ACD*=90°，又∵*BD*=*CD*，*BM*=*CM*1，

∴Rt△*BDM*≌Rt△*CDM*1.

∴*DM*=*DM*1，∠*BDM*=∠*CDM*1，

∴∠*MDM*1=∠*MDC*+∠*CDM*1=∠*MDC*+∠*BDM*=∠*BDC*=120°.

又∵∠*MDN*=60°，∴∠*M*1*DN*=∠*MDN*=60°.

又∵*DM*=*DM*1，*DN*=*DN*，∴△*MDN*≌△*M*1*DN*(*SAS*).

∴*MN*=*M*1*N*=*NC*+*M*1*C*=*CN*+*BM*.

[点评](1)对于此类题，三条线段之间的关系一般是它们的和差关系，证明方法通常采用截长补短法，本题适合补短法，不适合截长法.(2)等腰三角形的性质与判定常用来进行边角关系转换.

**同步训练**

1.下列命题中，正确的有( )个.

①两条边分别相等的两个直角三角形全等；

②斜边和直角边对应相等的两个直角三角形全等；

③斜边相等的两个等腰直角三角形全等.

(A)3 (B)2 (C)1 (D)0

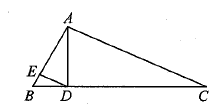
答案：B

2.在Rt△*ABC*中，∠*C*=90°，*AC*=*BC*，*CD*⊥*AB*，*CD*=7，则*AB*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：14

3.在Rt△*ABC*中，∠*C*=90°，*CD*⊥*AB*，点*E*是*AB*的中点，∠*ACE*=55°，则∠*DCB* = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：55°

4.在Rt△*ABC*中，∠*C*=90°，*CD*⊥*AB*，点*E*是*AB*的中点，∠*B*=10°，则∠*DCE* = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：70°

5.已知：如图所示，∠*BAC*=90°，∠*C*=30°，*AD*⊥*BC*于*D*，*DE*⊥*AB*于*E*，*BE*=1，*BC*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：8

6.已知等腰三角形一腰上的高线等于腰长的一半，那么这个等腰三角形的一个底角等于( ).

A.15°或75° B.15° C.75° D.150°或30°

答案：A

7.如图，在△*ABC*中，*AB*=*AC*，∠*A*=120°，*AB*的垂直平分线*MN*分别交*BC*、*AB*于点*M*、*N*．求证：*CM*=2*BM*．



8.如图，点*D*，*E*是等边△*ABC*的边*BC*，*AC*上的点，且*CD*=*AE*，*AD*，*BE*相交于点*F*，*BQ*⊥*AD*.若*FE*=1，*FQ*=3，求*AD*的长度.



**跟踪训练**

1.下列说法错误的是( ).

(A)两条直角边分别对应相等的两个直角三角形全等

(B)一条直角边一个锐角分别相等的两个直角三角形全等

(C)一个锐角及斜边对应相等的两个直角三角形全等

(D)一条直角边及斜边对应相等的两个直角三角形全等

答案：B

2.如图，已知*BD*=*CE*，*CE*⊥*AB*，*BD*⊥*AC*，则图中全等的三角形共有( )对.

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

答案：C

Image1 Image6 Image1

第2题图 第4题图 第5题图

3.如果两个三角形的两条边和其中一边上的高对应相等，那么这两个三角形的第三边所对的角( ).

(A)相等 (B)不相等 (C)相等或互余 (D)相等或互补

答案：D

4.如图，在Rt△*ABC*中，∠*C*=90°，*CD*⊥*AB*，则图中一定相等的锐角共有( )对.

(A)0 (B)1 (C)2 (D)3

答案：C

5.如图，在Rt△*ABC*中，∠*C*=90°，点*D*是*AB*的中点，则图中一定相等的锐角共有( )对.

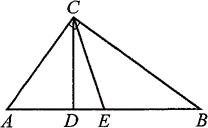
(A)3 (B)2 (C)1 (D)0

答案：B

6.如图，在Rt△*ABC*中，∠*C*=90°，*CD*⊥*AB*，点*E*是*AB*的中点，则图中一定相等的锐角共有( )对.

(A)5 (B)4 (C)6 (D)7

答案：C

 Image3

第6题图 第10题图

7.在Rt△*ABC*中，∠*C*=90°，∠*B*=30°，下列说法错误的是( ).

(A)∠*A*=60° (B)*AB*=2*BC* (C)∠*A*+∠*B*=90° (D)*AB*=2*AC*

答案：B

8.在Rt△*ABC*中，∠*C*=90°，*AB*=2*BC*，下列说法正确的是( ).

(A)∠*A*=30° (B)∠*B*=30° (C)∠*A*=45° (D)∠*B*=45°

答案：A

9.在Rt△*ABC*中，∠*C*=90°，∠*A*=30°，*CD*是*AB*边上的中线，下列说法错误的( ).

(A)*AB*=2*CD* (B)*AB*=2*BC* (C)*AC*=2*BC* (D)*BC*=*AD*

答案：C

10.如图，*AC*⊥*CD*，*FD*⊥*CD*，*AC*=*CD*=2*BD*=2*DF*，则下列判断错误的是( ).

(A)*AB*=*CF* (B)*AB*⊥*CF* (C)∠*BAC*=30° (D)∠*ACE*=∠*EBC*

答案：C